



**ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СЖАТИИ
(РАСШИРЕНИИ) ТРУБЫ ИЗ НЕСЖИМАЕМОГО
ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА,
ПОГРУЖЕННОЙ В НЕСЖИМАЕМУЮ ВЯЗКУЮ
ЖИДКОСТЬ, ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНИХ
ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК**

А.Б. Киселев

Механико-математический факультет МГУ
имени М.В. Ломоносова
Кафедра газовой и волновой динамики

**V Международная конференция
«Триггерные эффекты в геосистемах»**

ИДГ РАН, 7 июня 2019 г.

Представлено точное решение задачи расширения (сжатия) цилиндрической трубы из несжимаемого вязкопластического материала, погруженной в вязкую жидкость, под действием внешних динамических нагрузок. Задача имеет отношение к исследованию реакции трубопровода, проложенного под водой, на кратковременное воздействие.

Введение

Известно не так много аналитических (в рядах, интегралах), а тем более точных (представляющих собой конечные выражения), решений задач динамической упруговязкопластичности и динамики вязкой жидкости, ввиду их особой сложности (см. [Verney, 1968], [Григорьев и др., 1981], [Голубев, 1983], [Киселев, 2012-2017] и приведенную там библиографию). В работах [Киселев, 2012 а, б] получены точные решения одномерных нестационарных задач об адиабатическом сжатии и расширении толстостенных сферических и цилиндрических оболочек из несжимаемого вязкопластического материала в предположении, что в начальный момент времени распределения радиальных скоростей удовлетворяют условиям несжимаемости материала оболочек. При этом в работе [Киселев, 2012 а] решение получено в предположении, что шаровая часть тензора напряжений равна нулю. В статье [Киселев, 2012 б] это предположение не используется, и для получения решения привлекается закон сохранения полной энергии. В отличие от работ [Григорьев и др. 1981], [Голубев, 1983], где исследовались процессы схлопывания и

расширения сферических пор из несжимаемого вязкопластического материала под действием постоянной нагрузки, в статьях [Киселев, 2014], [Киселев, 2017] решения получены в случае воздействия произвольной динамической внешней нагрузки.

Решение, представленное в настоящей работе, как и в предыдущих статьях автора, указанных в приведенном ниже списке литературы, получено в лагранжевых переменных, что и сделало возможным получение точного решения, а не приближенного, асимптотического, в рядах и т.п., как в случае применения эйлеровых переменных, которые используются в большинстве исследований по близкой тематике.

Расширение цилиндрической трубы, погруженной в жидкость

Пусть полая цилиндрическая труба (толстостенная оболочка) начального внутреннего радиуса R_0 и внешнего радиуса R_1 окружена слоем жидкости толщиной $(R_1 - R_0)$ (рис). Рассматриваемая задача распадается на «внутреннюю» (задача для трубы) и «внешнюю» - для жидкости.

«Внутренняя» задача для трубы. В одномерном приближении (все параметры зависят от радиальной начальной лагранжевой координаты R и времени t) рассмотрим процесс адиабатического расширения цилиндрической оболочки, внутренний и внешний радиусы которой меняются с течением

времени по законам $r_0 = r(R_0, t)$ и $r_1 = r(R_1, t)$ (r – эйлеровая координата). Сделаем следующие упрощающие предположения.

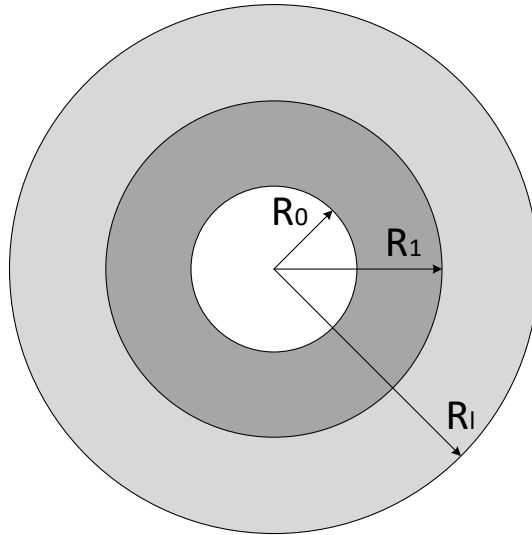


Рис. Схема конструкции: R_0 – внутренний радиус цилиндрической трубы, R_1 – её внешний радиус, $(R_l - R_1)$ – толщина слоя жидкости, окружающей трубу.

1) Поведение материала оболочки описывается уравнениями упруговязкопластической модели типа Соколовского-Пэжины [Пэжина, 1968]:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\dot{S}_{ij}}{2\mu} + \frac{S_{ij}(\sqrt{S_{ij}S_{ij}} - \sqrt{\frac{2}{3}}Y_0)}{2\eta\sqrt{S_{ij}S_{ij}}} H(\sqrt{S_{ij}S_{ij}} - \sqrt{\frac{2}{3}}Y_0). \quad (1)$$

Здесь $\dot{\epsilon}_{ij}$ и S_{ij} – девиаторы скоростей деформаций и напряжений, Y_0 – предел текучести при простом растяжении, $H(x)$ – единичная функция Хевисайда, μ и η – модуль сдвига и динамическая вязкость материала.

2) Упругими деформациями пренебрегается: $\dot{\varepsilon}_{ij}^e = 0$, $\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^p$ ($\dot{\varepsilon}_{ij}^e, \dot{\varepsilon}_{ij}^p$ и $\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p$ – скорости упругих, пластических и полных деформаций); пластическое течение несжимаемо: $\dot{\varepsilon}_{kk}^p = 0$.

В силу сделанных предположений и исходя из того, что в случае цилиндрической оболочки перемещения вдоль оси симметрии z отсутствуют, т.е. скорость деформации $\dot{\varepsilon}_z = 0$, уравнения (1) приводятся к двум уравнениям

$$\sigma_R = -\frac{1}{\sqrt{3}}Y_0 + 2\eta\dot{\varepsilon}_R, \quad \sigma_\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}Y_0 + 2\eta\dot{\varepsilon}_\theta. \quad (2)$$

где v – скорость; $\dot{\varepsilon}_R = \partial v / \partial R$, $\dot{\varepsilon}_\theta = v / R$ – радиальная и кольцевая скорости деформаций; σ_R, σ_θ – радиальное и кольцевое напряжения.

Условие несжимаемости материала $\dot{\varepsilon}_R + \dot{\varepsilon}_\theta = 0$ дает уравнение для нахождения распределения скоростей в оболочке:

$$\frac{\partial v}{\partial R} + \frac{v}{R} = 0. \quad (3)$$

Его решение имеет вид:

$$v = \frac{B(t)}{R}. \quad (4)$$

Причем $B(t) \geq 0$, поскольку происходит расширение оболочки и $v \geq 0$.

Уравнение движения имеет вид

$$\rho \dot{v} = \frac{\partial \sigma_R}{\partial R} + \frac{\sigma_R - \sigma_\theta}{R}. \quad (5)$$

Здесь ρ – плотность материала оболочки; точкой над символом здесь и далее обозначена материальная производная по времени.

Поставим следующие граничные условия для оболочки:

$$\sigma_R |_{R=R_1}(t) = \sigma_R^l |_{R=R_1}(t), \quad \sigma_R |_{R=R_0} = -P_0(t) \leq 0. \quad (6)$$

где $P_0(t)$ – давление на внутреннюю поверхность оболочки $R = R_0$, $\sigma_R^l(t)$ – радиальное напряжение в жидкости.

Если величина внешней нагрузки в начальный момент времени $P_0(0)$ превышает некоторое критическое значение, которое будет указано ниже, то материал оболочки полностью переходит в пластическое состояние. Именно такие нагрузки и рассматриваются.

Подставив (2), (4) в уравнение движения (5) и проинтегрировав его по радиусу R от R_0 до R_1 с учетом граничного условия (6), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $B(t)$:

$$\dot{B}(t) + \alpha B(t) = \beta \left(\sigma_R^l |_{R=R_1}(t) + P_0(t) \right) + \gamma, \quad (7)$$

где

$$\alpha = \frac{2\eta(R_1 - R_0)}{\rho R_1 R_0 \ln(R_1 / R_0)} > 0, \quad \beta = \frac{1}{\rho \ln(R_1 / R_0)} > 0, \quad \gamma = -\frac{2Y_0}{\sqrt{3}\rho} < 0.$$

Решение уравнения (7) с начальным условием $B(0) = 0$ (скорость оболочки при $t = 0$ равна нулю: $v|_{t=0} = B(0) / R$) будут следующими:

$$B(t) = \beta e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha t} \left(\sigma_R^l |_{R=R_1}(t) + P_0(t) \right) dt + \frac{\gamma}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}), \quad v(R, t) = \frac{B(t)}{R}. \quad (8)$$

Учитывая, что ускорение оболочки в начальный момент времени при её расширении положительно, т.е. $\dot{B}(0) > 0$, получаем условие на внешнее давление на оболочку со стороны жидкости:

$$\sigma_R^l |_{R=R_1}(0) + P_0(0) > -\frac{\gamma}{\beta} = \frac{2}{\sqrt{3}} Y_0 \ln \frac{R_1}{R_0}. \quad (9)$$

Величина $2Y_0 \ln \frac{R_1}{R_0} / \sqrt{3}$ является эффективным пределом текучести при всестороннем расширении цилиндрической вязкопластической трубы.

«Внешняя» задача для жидкости. Поведение среды описывается уравнениями модели вязкой жидкости Навье-Стокса,

которые в предположении несжимаемости и одномерном цилиндрическом приближении имеют следующий вид [Киселев, 2013, 2014]:

$$\sigma_R^l = -p^l + 2\mu^l e_R^l, \quad \sigma_\theta^l = -p^l + 2\mu^l e_\theta^l. \quad (10)$$

Здесь $\sigma_R^l, \sigma_\theta^l$ – радиальное и кольцевое напряжения в жидкости; p^l – давление; v^l – радиальная скорость; $e_R^l = \partial v^l / \partial R$, $e_\theta^l = v^l / R$ – радиальная и кольцевая скорости деформаций; μ^l – динамическая вязкость.

Условие несжимаемости жидкости $e_R^l + e_\theta^l = 0$ дает уравнение для нахождения распределения скоростей в сферическом слое:

$$\frac{\partial v^l}{\partial R} + \frac{v^l}{R} = 0. \quad (11)$$

Решение уравнения (11) имеет следующий вид:

$$v^l = \frac{C(t)}{R}. \quad (12)$$

При $C(t) \geq 0$ происходит расширение слоя и скорость $v^l \geq 0$. В начальный момент времени движение жидкости отсутствует, т.е. $v^l|_{t=0} = C(0) / R = 0$.

Запишем уравнение движения жидкости:

$$\rho^l \dot{v}^l = \frac{\partial \sigma_R^l}{\partial R} + \frac{\sigma_R^l - \sigma_\theta^l}{R}. \quad (13)$$

Здесь ρ^l – плотность жидкости.

Поставим следующие граничные условия:

$$\sigma_R^l |_{R=R_l}(t) = -P_{R_l}^l(t) \leq 0, \quad \sigma_R^l |_{R=R_1}(t) = \sigma_R |_{R=R_1}(t), \quad (14)$$

где $P_{R_l}^l(t)$ – давление на внешней поверхности цилиндрического слоя жидкости.

Подставив (10), (12) в уравнение движения (13) и проинтегрировав его по радиусу R от R_1 до R_l с учетом граничных условий (14), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $C(t)$:

$$\dot{C}(t) + \alpha^l C(t) = -\beta^l \left(\sigma_R |_{R=R_1}(t) + P_{R_l}^l(t) \right), \quad (15)$$

$$\text{где } \alpha^l = \frac{2\mu^l(R_l^2 - R_1^2)}{\rho^l R_l^2 R_1^2 \ln(R_l / R_1)} > 0, \quad \beta^l = \frac{1}{\rho^l \ln(R_l / R_1)} > 0.$$

Решение уравнения (15) с начальным условием $C(0) = 0$ и скорость v^l в слое жидкости будут следующим:

$$C(t) = -\beta^l e^{-\alpha^l t} \int_0^t e^{\alpha^l t} (\sigma_R |_{R=R_1}(t) + P_{R_1}^l(t)) dt, \quad v^l(R, t) = \frac{C(t)}{R}. \quad (16)$$

Из решения (16) видно, что расширение цилиндрического слоя жидкости происходит при условии $\sigma_R |_{R=R_1}(t) + P_{R_1}^l(t) < 0$. Учитывая, что ускорение жидкости в начальный момент времени должно быть неотрицательным, т.е. $\dot{C}(0) \geq 0$, из (16) получаем условие на начальное внешнее давление на оболочку со стороны жидкости:

$$P_{R_1}^l(0) \leq -\sigma_R |_{R=R_1}(0). \quad (17)$$

Контактная задача оболочка – жидкость. На контактной границе оболочка – жидкость ставятся условия равенства радиальных скоростей и напряжений: $v |_{R=R_1} = v^l |_{R=R_1}$, $\sigma_R |_{R=R_1} = \sigma_R^l |_{R=R_1}$.

Приравняв решения (8), (16) при $R = R_1$ и дважды продифференцировав получившееся уравнение, получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение для определения радиальных напряжений на контактной поверхности $\Sigma(t) = \sigma_R |_{R=R_1}(t) = \sigma_R^l |_{R=R_1}(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\Sigma}(t) + \frac{\alpha\beta^l + \alpha^l\beta}{\beta + \beta^l} \Sigma(t) = & -\frac{\beta}{\beta + \beta^l} \dot{P}_0(t) - \frac{\alpha^l\beta}{\beta + \beta^l} P_0(t) - \\ & -\frac{\beta^l}{\beta + \beta^l} \dot{P}_{R_l}^l(t) - \frac{\alpha\beta^l}{\beta + \beta^l} P_{R_l}^l(t) - \frac{\alpha^l\gamma}{\beta + \beta^l}. \end{aligned} \quad (18)$$

Из условий (9), (17) получаются ограничения на $\Sigma(0)$:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} Y_0 \ln \frac{R_1}{R_0} - P_0(0) < \Sigma(0) \leq -P_{R_l}^l(0). \quad (19)$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A = \frac{\alpha\beta^l + \alpha^l\beta}{\beta + \beta^l} > 0, \quad f(t) = & -\frac{\beta}{\beta + \beta_l} \dot{P}_0(t) - \frac{\alpha^l\beta}{\beta + \beta_l} P_0(t) - \\ & -\frac{\beta^l}{\beta + \beta^l} \dot{P}_{R_l}^l(t) - \frac{\alpha\beta^l}{\beta + \beta^l} P_{R_l}^l(t) - \frac{\alpha^l\gamma}{\beta + \beta^l}. \end{aligned}$$

Тогда решение уравнения (18) примет вид

$$\Sigma(t) = e^{-At} \int_0^t e^{At} f(t) dt + \Sigma(0) e^{-At}. \quad (20)$$

Если давление на внешней поверхности слоя жидкости отсутствует ($P_{R_l}^l(t) = 0$), давление на внутренней поверхности оболочки постоянно и равно P_0 , из (20) получим выражение для

радиального напряжения на контактной поверхности оболочки и жидкости:

$$\Sigma(t) = -\frac{\alpha(\beta P_0 + \gamma)}{A}(1 - e^{-At}) + \Sigma(0)e^{-At}. \quad (21)$$

Поскольку материал оболочки считается несжимаемым и поэтому скорость распространения радиальных возмущений бесконечна, логично принять, что в формуле (21) $\Sigma(0) = -P_0 R_0^2 / R_1^2$.

Из (8) найдем скорость расширения трубы ($R_0 \leq R \leq R_1$):

$$v(R,t) = \frac{\beta}{R} e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha t} (P_0(t) + \Sigma(t)) dt + \frac{\gamma}{\alpha R} (1 - e^{-\alpha t}) \quad (22)$$

О сжатии цилиндрической трубы, погруженной в жидкость

Очевидно, что полученное решение одномерной задачи о расширении толстостенной цилиндрической трубы из несжимаемого вязкопластического материала, погруженной в несжимаемую вязкую жидкость, может быть использовано и для случая сжатия трубы внешней нагрузкой, действующей со стороны жидкости (давление $P_{R_1}^l(t)$). Для этого достаточно во всех формулах заменить Y_0 на $(-Y_0)$. Полученное таким образом решение будут иметь физический смысл до момента схлопывания

оболочки t_* , когда перемещение внутренней поверхности оболочки $R = R_0$ станет равным по абсолютной величине R_0 :

$$w(R_0, t_*) = \int_0^{t_*} v(R_0, t) dt = -R_0.$$

Рассмотрим случай, когда давление на внутреннюю поверхность трубы $R = R_0$ отсутствует ($P_0|_{R=R_0}(t) = 0$), а давление на внешней поверхности жидкости $R = R_l$ меняется по следующему закону: $\sigma_R^l|_{R=R_l}(t) = -P_{R_l}^l(t) = -P_{R_l}^{const} H(\tau - t)$, $P_{R_l}^{const} = const > 0$, τ – время действия нагрузки. Такая нагрузка в первом приближении моделирует воздействие на трубопровод взрыва заряда большой мощности в воде, окружающей конструкцию ($P_{R_l}^{const} > 2Y_0 / \sqrt{3}$). Тогда радиальное напряжение на контактной поверхности вода-оболочка изменяется по времени по следующему закону:

$$\Sigma(t) = \frac{e^{A\tau} - 1}{A(\beta + \beta^l)} \left[e^{-At} (\alpha\beta^l P_{R_l}^{const} + \alpha^l \gamma) - \alpha^l \gamma \right].$$

Из представленных решений легко могут быть получены формулы для распределения деформаций, напряжений, температуры, которые здесь не приводятся ввиду краткости изложения.

Заключение

Полученные точные решения могут быть полезны, в частности, для тестирования программ численного расчета и оценки эффективности численных методов.

Работы проводились при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00151).

Литература

Голубев В.К. О расширении пор в пластичных металлах при отколе // Прикладная механика и техническая физика. 1983. № 6. С. 159-165.

Григорьев В.Г., Дунин С.З., Сурков В.В. Захлопывание сферической поры в вязкопластическом материале // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1981. № 1. С. 199- 201.

Киселев А.Б. Аналитические решения задач об адиабатическом сжатии толстостенных сферических и цилиндрических оболочек из несжимаемого вязкопластического материала // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76. Выпуск 4. С. 675-679.

Киселев А.Б. К исследованию процесса нестационарного расширения толстостенных сферических и цилиндрических вязкопластических оболочек // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2012. № 6. С. 20-25.

Киселев А.Б. Аналитические решения задач об адиабатическом сжатии и расширении сферического и цилиндрического слоев из несжимаемой вязкой жидкости // Прикладная физика и математика. 2013. № 1. С. 88-93.

Киселев А.Б. Дополнение к статье А.Б. Киселева «Аналитические решения об адиабатическом сжатии толстостенных сферических и цилиндрических оболочек из несжимаемого вязкопластического материала» ПММ. 2012. Т. 76. Вып. 6. С. 675-679 // Прикладная математика и механика. 2014. Т. 78. Выпуск 6. С. 858-861.

Киселев А.Б. О динамическом сжатии (расширении) сферической полости в вязкой несжимаемой жидкости. Задача Забабахина // Прикладная физика и математика. 2014. № 6. С. 42-46.

Киселев А.Б. Аналитические решения динамических задач расширения (сжатия) толстостенных сферических и цилиндрических вязкопластических оболочек, погруженных в вязкую жидкость // Прикладная физика и математика. 2016. № 2. С. 32-38.

Киселев А.Б. Точные решения одномерных задач расширения (сжатия) полых двухслойных шаров и цилиндрических труб из вязкопластических материалов под действием внешних динамических нагрузок // Прикладная физика и математика. 2017. № 2. С. 22-30.

Нигматулин Р.И. Механика сплошной среды. Кинематика. Динамика. Термодинамика. Статистическая динамика. М: ГЭОТАР-Медиа, 2014. - 640 с.

Пэжина П. Основные вопросы вязкопластичности. М.: Мир, 1968. - 176 с.

Verney D. Evaluation de la limite elastique du cuivre et de l'uranium par des experiences d'implosion "lente" // Behavior of Dense Media under High Dynamic Pressures. Symposium H.D.P. Paris, 1968. Gordon and Breach: New York, 1968. P. 293.