О точности осреднения в плоских задачах stick-slip и моделирования тектонических землетрясений

Губарь А.Ю.

ФГБУН Институт физики Земли им. О.Ю.Шмидта Российской академии наук, Москва, Россия

e-mail: parkag@yandex.ru

1. Тектонические землетрясения вызываются разрывом сплошности (РС) пород на достаточном протяжении вдоль активных разломов (АР) – слоев толщиной h_F~100 м с сильно разрушенными (трещиноватыми) флюидонасыщенными породами, где необходимо учитывать дилатансию и взаимодействие микротрещиин. В действительности, протяженные РС происходят в еще более тонких ультракатакластических слоях толщиной h_u~1-10 мм и менее. В масштабах h_T>>h_F тектонические блоки (ТБ, зоны вне АР) могут считаться сплошными упругими (или упруго-вязкими) средами (УС), сами макротрещины – плоскими, а условия в АР, регулирующие процессы stick-slip, -- граничными условиями в плоскости скольжения. Для описания движения цепочек ТБ масштаба L_T>>h_T обычно используются различные модели цепочек уравнений движения точечных масс (УТМ), взаимодействующих между собой и параметрами состояния в АР-РС, например, модель Барриджа-Кнопова с законом трения Rate&State, и другие. Возникает вопрос: насколько решения УТМ-моделей отличаются от точных решений соответствующих начально-краевых задач для УС в ТБ?

2. Пусть УС в каждом ТБ – линейная изотропная однородная плоская и содержит одну компоненту тектонического смещения $u_i = \delta_{i1} u(x^{(1)}, x^{(2)}, t)$ вдоль АР ($x^{(2)}$ – поперек АР). Тогда

$$u = u^{(1)}(x^{(1)}, t) + u^{(2)}(x^{(2)}, t),\ {}^{(k)}r^2 u^{(k)} = u^{(k)}_{,kk},\ (k=1,2), \qquad (1)$$

где ${}^{(1)}r \equiv r = \partial_t$, ${}^{(2)}r = {}^{(1)}rq$, $q = \tau^{(2)}/\tau^{(1)}$, $\tau^{(k)} = L^{(k)}/c^{(k)}$, $c^{(1)} = \sqrt{\dfrac{\Lambda + 2G}{\rho}}$ и $c^{(2)} = \sqrt{\dfrac{G}{\rho}}$ – скорости продольных и поперечных волн, $L^{(1)}$ и $L^{(2)}$– продольные и поперечные размеры блока (безразмерные t, $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ – в единицах $\tau^{(1)}$, $L^{(1)}$ и $L^{(2)}$). Из (1) можно получить 6 независимых соотношений

$$V^{(k)\pm} = \pm \frac{1}{N^{(k)}}(M^{(k)} u^{(k)\pm} - \bar{u}^{(k)}),\ (k=1,2),\ {}^{(k)}r^2 \bar{u}^{(k)} = V^{(k)+} - V^{(k)-} \qquad (2)$$

для 10-ти величин $u^{(k)\pm} = u^{(k)}(1/0, t)$, $V^{(k)\pm} = u^{(k)}_{,k}(1/0, t)$, $\bar{u}^{(k)} = \int_0^1 u^{(k)}(x^{(k)}, t) dx^{(k)}$, где $M^{(k)} = M({}^{(k)}r)$, $M(r) = \mathrm{sh}(r)/\mathrm{r}$, $N(r) = (\mathrm{ch}(r) - 1)/r^2$. В представлении (1) граничные условия должны быть заданы в виде 4-х соотношений для среднеповерхностных смещений $\bar{u}^{(1)\pm} = u^{(1)\pm} + \bar{u}^{(2)}$, $\bar{u}^{(2)\pm} = u^{(2)\pm} + \bar{u}^{(1)}$ и напряжений $\bar{\sigma}^{(1)\pm}_{11} = R^{(1)} V^{(1)\pm}$, $\bar{\sigma}^{(2)\pm}_{12} = R^{(2)} V^{(2)\pm}$ $\bar{\sigma}^{(2)\pm}_{22} = R^{(22)}(u^{(1)+} - u^{(1)-})$, где $R^{(1)} = (\Lambda + 2G)/L^{(1)}$, $R^{(2)} = G/L^{(2)}$, $R^{(22)} = \Lambda / L^{(1)}$.

Для N>2 блоков с обычными условиями на внутренних границах ($\bar{u}^{(1)+}_n = \bar{u}^{(1)-}_{n+1}$, $\bar{\sigma}^{(1)+}_{11n} = \bar{\sigma}^{(1)-}_{11(n+1)}$) из (2) следует:

$$\sum_{j=-1}^{1} (K^{(1)}_{nj} \bar{u}^{(1)}_{n+j} + K^{(2)}_{nj} \bar{u}^{(2)}_{n+j}) = 0,\ n = 1,..,N-1, \qquad (3)$$

где $K^{(1)}_{n,\pm1} = -\varphi^{\pm}_n \mu_{n\pm1}$, $K^{(1)}_{n,0} = {}^{(1)}r^2_n + (\varphi^+_n + \varphi^-_n)\mu_n$, $K^{(2)}_{n,\pm1} = -\varphi^{\pm}_n$, $K^{(2)}_{n,0} = \varphi^+_n + \varphi^-_n$, $\varphi^{\pm}_n = \dfrac{l_n}{l_n \eta_n + l_{n\pm1}\eta_{n\pm1}}$, $\eta_n = \eta({}^{(1)}r_n)$, $\mu_n = \mu({}^{(1)}r_n)$, $\eta(r) = \dfrac{N(r)}{M(r)}$, $\mu(r) = \dfrac{1}{M(r)}$, $l_n = 1/R^{(1)}_n$.

Цепочка уравнений (3) (плюс уравнения, следующие из условий на внешних границах) является точной, однако она требует бесконечно много начальных условий. Если для каждого блока известны лишь N_0 начальных данных (например, $\overline{u}_n^{(k)}(0)$, $\dot{\overline{u}}_n^{(k)}(0)$, $\overline{u}_n^{(k)\pm}(0)$, $\dot{\overline{u}}_n^{(k)\pm}(0)$ и т.д.), то операторы $K_{nj}^{(k)}$ должны быть разложены в ряды до $O({}^{(k)}r_n^{N_0})$ в окрестности $N*N_0$ первых точных собственных значений, зависящих от граничных условий, из которых наиболее важны условия в АР-РС, «переключающие» slip и stick и связывающие разрыв смещений, напряжение на разрыве и другие параметры состояния АР-РС. Полученная таким образом цепочка укороченных уравнений (3) также будет давать точные решения для рассматриваемых $N*N_0$ параметров. В моделях УТМ рассматриваются лишь средние смещения, и поэтому их решения не могут быть точными для конкретных краевых задач. Например, решения УТМ с N_0=2 для внутренних блоков будут иметь относительную ошибку не менее 20% (!).

3. Для одного блока с $V^{(1)\pm}=0$, можно положить $u^{(1)}\equiv 0$ (=> $u\equiv u^{(2)}(y,t)$). Пусть $u^{-}\equiv 0$ и рассмотрим режим slip с $V^{+}=V_f(W)$, где $W\equiv\dot{a}=V_p-\dot{u}^{+}$, V_p~0.1-15 см/год – заданная средняя скорость смещения другой стороны АР. Тогда из (2) следуют уравнения $\mathrm{ch} r\cdot u^{+}=M\cdot V_f(W)$, $M\overline{u}=Nu^{+}$ ($r={}^{(2)}r$), решение которых для линеаризованной $V_f=V_{f0}-\gamma_f\dot{u}^{+}$ есть $u^{+}=V_{f0}+\mathrm{Re}\sum A_k e^{r_k t}$, $\overline{u}=\dfrac{V_{f0}}{2}+\mathrm{Re}\sum A_k\dfrac{N(r_k)}{M(r_k)}e^{r_k t}$, где $r_k=-\lambda_f(\gamma_f)+i\omega_k$, $\lambda_f(\gamma_f)=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+\gamma_f}{1-\gamma_f}\right|$, $\omega_k=\{\pi(1/2+\mathrm{k}),\text{ при }|\gamma_f|<1;\ \pi k,\text{ при }|\gamma_f|>1\}$. И если $|\gamma_f|<1$ и известны лишь $u^{+}(0)$, $\dot{u}^{+}(0)$, то уравнения $\dfrac{1}{\Omega^2}\ddot{u}^{+}+\dfrac{2\lambda_f}{\Omega^2}\dot{u}^{+}+u^{+}=V_{f0}$, $\Omega=|r_1|=\sqrt{\dfrac{\pi^2}{4}+\lambda_f^2(\gamma_f)}$ дают точное решение $u^{+}(t)$. А решения соответствующего УТМ (для $u^{+}=2\overline{u}$): $\dfrac{1}{\tilde{\Omega}^2}\ddot{u}^{+}+\dfrac{2\gamma_f}{\tilde{\Omega}^2}\dot{u}^{+}+u^{+}=V_{f0}$, где $\tilde{\Omega}=\sqrt{k/m}=\mathrm{const}$, (k и m – коэффициент упругости и масса), – имеют бесконечно большие (!!) ошибки при $|\gamma_f|\to 1$.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИФЗ РАН № 0144-2014-0090.